Uitwerking Tentamen Signalen & Systemen

Donderdag 8 april 2010, 9:00-12:00 uur

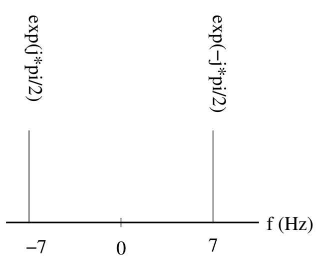
Opgave 1: signalen en spectra
(a) Het eerste signaal is een cosinus met amplitude 4 en fase $\frac{\pi}{2}$. Twee volledige slingeringen worden doorlopen in één seconde. De frequentie is dus 2Hz.
Het tweede signaal is een cosinus met amplitude 2 en fase 0. Vier volledige slingering worden doorlopen in 1 seconden. De frequentie is dus 4Hz.
Het derde signaal is het product van de eerste twee signalen. Samengevat,

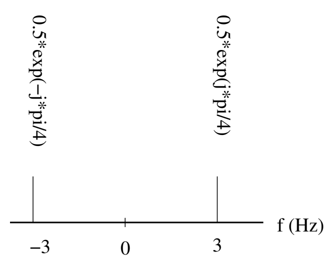
$$x_0(t) = 4\cos(2\pi 2t + \pi/2), \quad x_1(t) = 2\cos(2\pi 4t), \quad x_2(t) = 8\cos(2\pi 2t + \pi/2)\cos(2\pi 4t).$$

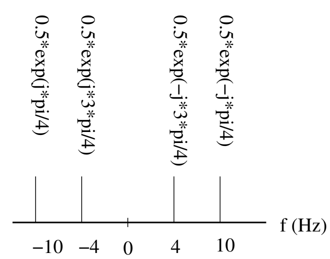
(b) Met de formule van Euler (13) vinden we

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2\sin(2\pi 7t) = 2\cos(2\pi 7t - \pi/2) = e^{-j\pi/2}e^{j14\pi t} + e^{j\pi/2}e^{-j14\pi t} \\
y(t) &= \cos(2\pi 3t + \pi/4) = \frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{j6\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{-j6\pi t} \\
z(t) &= x(t)y(t) = \left(e^{-j\pi/2}e^{j14\pi t} + e^{j\pi/2}e^{-j14\pi t}\right)\left(\frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{j6\pi t} + \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{-j6\pi t}\right) \\
&= \frac{e^{-j\pi/4}}{2}e^{j20\pi t} + \frac{e^{j\pi/4}}{2}e^{-j20\pi t} + \frac{e^{-j3\pi/4}}{2}e^{j8\pi t} + \frac{e^{j3\pi/4}}{2}e^{-j8\pi t}
\end{aligned}$$

(c) De onderstaande 3 figuren zijn de spectra van respectievelijk $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$:

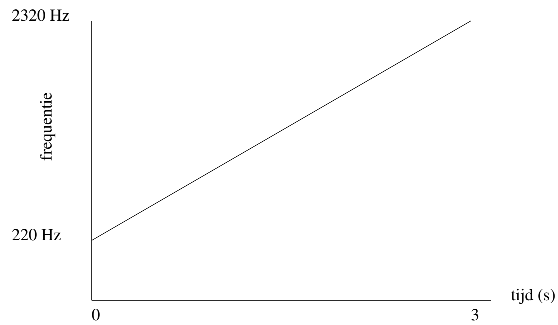






(d) Blijkbaar moet gelden: $\frac{d}{dt}\Psi(t) = \frac{2100}{3}t + 220 = 700t + 220$. Na integreren vinden we: $\Psi(t) = 350t^2 + 220t + \phi$. Gegeven is dat op $t = 0$ de fase 0 is, dus $\phi = 0$. De amplitude is 1, dus we vinden $x(t) = \cos(2\pi(350t^2 + 220t))$.

(e) De frequentie van het signaal verandert, dus we hebben te maken met frequentiemodulatie (FM). De frequentie neemt lineair toe in de tijd, dus het spectrogram is een rechte lijn:



Opgave 2: Fourier analyse

(a) De DC-component is het gemiddelde over één periode ($T_0 = 2$):

$$\begin{aligned} DC &= a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 e^t dt + \int_1^2 e^{2-t}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\left[e^t\right]_0^1 + \left[-e^{2-t}\right]_1^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(e-1-1+e) = e-1 \end{aligned}$$

(b) We gebruiken formule (23). We substitueren $T_0 =$ en bepalen $2a_k$:

$$2a_k = \int_0^1 e^t e^{-j\pi kt}dt + \int_1^2 e^{2-t}e^{-j\pi kt}dt.$$

Het is handig om de substitutie $\alpha = -j\pi k$ te introduceren:

$$\begin{aligned} 2a_k &= \int_0^1 e^t e^{\alpha t}dt + \int_1^2 e^{2-t}e^{\alpha t}dt = \int_0^1 e^{(\alpha+1)t}dt + \int_1^2 e^{2+(\alpha-1)t}dt \\ &= \left[\frac{e^{(\alpha+1)t}}{\alpha+1}\right]_0^1 + \left[\frac{e^{2+(\alpha-1)t}}{\alpha-1}\right]_1^2 = \frac{e^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} + \frac{e^{2\alpha}-e^{\alpha+1}}{\alpha-1} \\ &= \frac{\alpha e^{\alpha+1} - e^{\alpha+1} - \alpha + 1 + \alpha e^{2\alpha} - \alpha e^{\alpha+1} + e^{2\alpha} - e^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha-1)} \\ &= \frac{2-2e^{\alpha+1}}{\alpha^2-1} \end{aligned}$$

In de laatste stap is gebruik gemaakt van $e^{2\alpha} = e^{-j2\pi k} = (e^{-j2\pi})^k = 1^k = 1$. We maken nu de substitutie $\alpha = -j\pi k$ ongedaan en vinden:

$$a_k = \frac{1-e^{\alpha+1}}{\alpha^2-1} = \frac{1-e^{-j\pi k+1}}{(-j\pi k)^2-1} = \frac{1-e(e^{-j\pi})^k}{-\pi^2k^2-1} = \frac{-1+(-1)^k e}{\pi^2k^2+1}$$

Voor even k is $a_k = (e-1)/(\pi^2k^2+1)$ en voor oneven k is $a_k = (-e-1)/(\pi^2k^2+1)$.

(c) We zetten eerste het signaal om naar een som van cosinussen:

$$z(t) = 3 + 5\sin(2\pi 5t) + 7\cos(2\pi 30t) = 3 + 5\cos(2\pi 5t - \pi/2) + 7\cos(2\pi 30t).$$

Omdat $f_0 = \text{ggd}(5, 30) = 5$ is het signaal periodiek met $T_0 = 1/5$. Uiteraard kunnen we opnieuw met behulp van formule (23) de coëficienten uitrekenen, maar in dit geval kun je ze direct aflezen. We vinden:

$$\begin{aligned} a_{-6} &= 3/2 \\ a_{-1} &= 5e^{j\pi/2}/2 \\ a_0 &= 3 \\ a_1 &= 5e^{-j\pi/2}/2 \\ a_6 &= 3/2 \\ a_k &= 0 \text{ voor alle overige } k \end{aligned}$$

Opgave 3: LTI-Systemen

(a) Een systeem F is lineair als geldt: $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ en $F(x + y) = F(x) + F(y)$ voor ieder signaal x, y en scalair α. Dis is duidelijk geval voor de systemen $p[n]$ en $q[q]$ maar niet voor $r[n]$ (kies bijvoorbeeld $\alpha = -1$).

Een systeem F heet tijdsinvariant als een verschuiving van $x[n]$ met k samples een verschuiving van de uitvoer levert met k samples (voor alle signalen x en gehele k). Dit is duidelijk voor alle drie systemen het geval.

Een systeem F is causaal als het voor het bepalen van de uitvoer op positie n alleen waarden nodig heeft van de invoer op posities k met $k \leq n$. Dit is duidelijk het geval voor de systemen q en r, maar niet voor het systeem p.

(b) Dit is eenvoudig te bepalen via een convolutie:

$$y = x * h = \{3, 1, 4, 1, 5\} * \{1, 2, 3, 2, 1\} = \{3, 7, 15, 18, 24, 22, 21, 11, 5\}.$$

De gevraagde uitvoer $y[n]$ is dus

$$3\delta[n]+7\delta[n-1]+15\delta[n-2]+18\delta[n-3]+24\delta[n-4]+22\delta[n-5]+21\delta[n-6]+11\delta[n-7]+5\delta[n-8]$$

(c) Gegeven is dat het systeem F_1 LTI is, dus we kunnen een impulse response $h_1[n]$ bepalen. De lengte van het uitvoersignaal is 6 samples lang, terwijl die van de invoer 5 samples lang is. De impulse respons moet dus 2 samples lang zijn (omdat $|y| = |x| + |h_1| - 1$). Stel nu $h_1 = \{a, b\}$ en bepaal de convolutie van x met h_1:

$$y = x*h_1 = \{3, 1, 4, 1, 5\}*\{a, b\} = \{3a, a+3b, 4a+b, a+4b, 5a+b, 5b\} = \{3, -2, 3, -3, 4, -5\}$$

Er moet dus gelden $a = 1$ en $b = -1$. De unit impulse response is dus $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

Een systeem is causaal als de uitvoer op een zeker tijdstip alleen afhangt van de huidige en vorige waarden van de invoer. Omdat we nu de differentievergelijking $y[n] = 4x[n]+2x[n-1]+4x[n-2] + 2x[n-3]$ hebben gevonden, kunnen we duidelijk zien dat het systeem causaal is.

(d) We kunnen de filtercoëfficienten van een FIR-filter 'uitlezen' door de invoer $x[n] = \delta[n]$ aan te bieden. Omdat $\delta[n] = u[n] - u[n-1] = u[n] - w[n]/2$ kunnen we dus lineariteit toepassen en vinden $h[n] = y[n] - z[n]/2 = \{2, 7, 1, 8\}$.

(e) De filtercoëfficienten van het samengestelde FIR-filter zijn te bepalen via de convolutie:

$$h = \{1, -1\} * \{1, 0, 1\} * \{0, 1, -1\} = \{0, 1, -2, 2, -2, 1\}.$$

We vinden dus de differentievrgelijking:

$$y[n] = x[n-1] - 2x[n-2] + 2x[n-3] - 2x[n-4] + x[n-5]$$

Het invullend van de coëfficienten in formule (30) levert de frequentierespons:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = e^{-j\hat{\omega}} - 2e^{-j2\hat{\omega}} + 2e^{-j3\hat{\omega}} - 2e^{-j4\hat{\omega}} + e^{-j5\hat{\omega}}$$

(g) Uit de plot blijkt dat de gain 4 is voor de frequentie $\hat{\omega} = 0$, dus $y_0[n] = 4x_o[n] = 4$. De gain voor de frequentie $\hat{\omega} = \pi/2$ is 2 en de bijbehorende faseverschuiving is $-\pi/2$, dus $y_1[n] = 4\cos(n\pi/2 - \pi/2)$. De gain voor de frequentie $\hat{\omega} = \pi$ is 0, dus $y_2[n] = 0$.
Gebruik makend van lineariteit vinden we dus $x_3[n] = 4 + 4\cos(n\pi/2 - \pi/2)$.

Opgave 4: z-transformaties
(a) De systeemfunctie is $H(z) = \sum_{k=0}^{4} h[k]z^{-k} = \frac{1}{4}(1 - z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$. Het bepalen van de nulpunten is eenvoudig:

$$\begin{aligned} & 1 - z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (z+1)(z^2+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & z_0 = -1 = e^{j\pi} \vee z_1 = -j = e^{-j\pi/2} \vee z_2 = j = e^{j\pi/2} \end{aligned}$$

De nulpunten van de systeemfunctie geven de frequenties die volledig door het FIR-filter worden verwijderd (precieser: het signaal $x_i[n] = z_i^n$ wordt volledig verwijderd).

(b) Wegens lineariteit mogen we de componenten van de invoer gescheiden beschouwen. Uiteraard wordt de DC component niet gewijzigd (gemiddelde van constanten). Uit onderdeel (a) blijkt dat de frequentie $\pi/2$ volledig wordt verwijderd. We houden dus alleen de frequentie met $\pi/3$ over. De uitvoer is dus:

$$\begin{aligned} y[n] &= 4 - \frac{3}{4}\left(\cos(\frac{n\pi}{3}) + \cos(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{n\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\frac{n\pi}{3} - \pi)\right) \\ &= 4 - \frac{3}{4}\left(\cos(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) + \cos(\frac{n\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

(c) We plaatsen twee filters in cascade. De impulsrepons van de samenstelling is:

$$\frac{1}{2}\{1,1\} * \frac{1}{6}\{1,1,1,1,1,1\} = \frac{1}{12}\{1,2,2,2,2,2,1\}.$$

De bijbehorende systeemfunctie is $H(z) = \frac{1}{12}(1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6})$. De differentievergeijking is $y[n] = \frac{1}{12}(x[n] + 2x[n-1] + 2x[n-2] + 2x[n-3] + 2x[n-4] + 2x[n-5] + x[n-6])$.

(d) In onderdeel (c) vinden we een systeemfunctie van de zesde graad. Dit polynoom heeft 6 nulpunten, terwijl we slechts vier nulpunten nodig hebben om de twee gevraagde frequenties te verwijderen. Er worden blijkbaar meerdere frequenties verwijderd.

(e) We construeren een systeemfunctie met de nulpunten $z_0 = e^{j\pi/4}$, $z_1 = e^{-j\pi/4}$, $z_2 = e^{j\pi/3}$ en $z_3 = e^{-j\pi/3}$.

$$\begin{aligned}
H(z) &= (1 - z_0 z^{-1})(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})(1 - z_3 z^{-1}) \\
&= (1 - (z_0 + z_1)z^{-1} + z_0 z_1 z^{-2})(1 - (z_2 + z_3)z^{-1} + z_2 z_3 z^{-2}) \\
&= (1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2})(1 - z^{-1} + z^{-2}) \\
&= 1 - (1 + \sqrt{2})z^{-1} + (2 + \sqrt{2})z^{-2} - (1 + \sqrt{2})z^{-3} + z^{-4})
\end{aligned}$$